Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 8

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

11 de junio de 2023

1. Encontrar las soluciones de la ecuación de Dirac.

La ecuación de Dirac se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -p_0 - m \end{pmatrix} u = 0 \tag{1}$$

Empecemos por multiplicar la ecuación por la matriz $\begin{pmatrix} p_0 + m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -p_0 + m \end{pmatrix}$:

$$0 = \begin{pmatrix} p_0 + m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -p_0 + m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 - m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -p_0 - m \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} p_0^2 - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 - m^2 & 0 \\ 0 & p_0^2 - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 - m^2 \end{pmatrix} u \tag{2}$$

Podemos simplificar el producto $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2$ de la siguiente forma:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = p_i p_j \sigma^i \sigma^j = p_{(i}p_{j)}\sigma^i\sigma^j = p_i p_j \sigma^{(i}\sigma^{j)} = p_i p_j \delta^{ij} = \vec{p}^{\,2}$$

Donde he usado la notación $a_{(i}b_{j)} = \frac{a_i b_j + a_j b_i}{2}$ y la propiedad $2\sigma^{(i}\sigma^{j)} = \left\{\sigma^i, \sigma^j\right\} = 2\delta^{ij}$. Ahora podemos reescribir la ecuación (2)

$$\begin{pmatrix} p_0^2 - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 - m^2 & 0 \\ 0 & p_0^2 - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 - m^2 \end{pmatrix} u = \left(p_0^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2\right) u = 0$$

Evidentemente $u = 0$ es una solución de la ecuación de Dirac, pero no estamos interesados en esta, por lo que cualquier solución con $u \neq 0$ debe cumplir necesariamente que

$$p_0^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \Longrightarrow p_0 = \pm\omega_p, \qquad \omega_p \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

Por lo que podemos agrupar todas las soluciones en dos grupos. Reescribamos primero el vector u de la siguiente forma

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

donde α y β son vectores de dos componentes. Ahora podemos reescribir la ecuación (1) como

$$(p_0 - m)\alpha = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\beta, \qquad \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\alpha = (p_0 + m)\beta \tag{3}$$

Ahora estaríamos tentados en simplemente aislar α o β, pero primero debemos asegurarnos que no dividimos por cero, hay tres coeficientes en estas ecuaciones, consideremos primero el caso $\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = 0$. Debido a que las matrices de Pauli son linealmente independientes, esto solo es posible si $\vec{p} = 0$, y las dos ecuaciones tendrán la forma

$$(p_0 - m)\alpha = 0, \qquad (p_0 + m)\beta = 0$$

Recordemos que p_0 solo puede tomar dos valores, el primero $p_0 = \omega_p = m$ implica que $\beta = 0$, mientras que α puede tener cualquier valor. La segunda posibilidad $p_0 = -\omega_p = -m$ nos da una segunda solución con $\alpha = 0$. Por lo que hemos encontrado las dos primeras soluciones

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \qquad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} e^{imt}$$

Donde χ puede ser cualquier vector de dos componentes. Dado que queremos encontrar soluciones continuas, usaremos estas dos expresiones como condiciones de contorno. Los otros casos que debemos considerar son los casos donde $p_0 - m = 0$ y $p_0 + m = 0$, pero dado que sabemos que $p_0 = \pm\omega_p$, estos dos casos son idénticos a $\vec{p} = 0$, por lo que ya están incluidos en las soluciones que hemos encontrado. Si continuamos con las ecuaciones (3), ahora que sabemos que los coeficientes son distintos de cero, por lo que las podemos reescribir como

$$\alpha = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p_0 - m}\beta, \qquad \beta = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p_0 + m}\alpha$$

Notemos que si sustituimos una dentro de otra obtenemos las condiciones

$$\alpha = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{p_0^2 - m^2}\alpha, \qquad \beta = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{p_0^2 - m^2}\beta$$

que es otra forma de demostrar que las soluciones son posibles solo si se cumple que $p_0 = \pm\omega_p$. Sustituyendo estas expresiones en u, podemos reescribir u como

$$u = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p_0-m}\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p_0+m}\alpha \end{pmatrix}$$

Notemos pero que ambas formas son exactamente idénticas, y uno puede cambiar de una a otra sustituyendo α por β o viceversa, pero resulta muy conveniente usar una expresión u otra dependiendo del valor de p_0.
Empecemos por el caso donde $p_0 = \omega_p$, podemos escribir la solución como

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega_p+m}\chi \end{pmatrix} e^{-i\omega_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Notemos que en el límite $\vec{p} \to 0$ recuperamos la solución ψ_+ siempre y cuando el vector χ (que en general puede depender de $\vec{p}$) tienda a un vector constante distinto de cero en el límite $\vec{p} \to 0$. Esto pone de manifiesto el motivo por el cual hemos elegido la solución de u en función de α, pues si usáramos la solución β, deberíamos imponer que el vector χ tendiera a cero, pero de una forma muy concreta para que la primera componente también tuviera el límite adecuado. Es posible hacerlo, pero mucho más fácil usando la otra expresión.

Recordemos que χ es un vector arbitrario de dimensión 2, por lo que en realidad tenemos dos soluciones linealmente independientes, escogiendo $\chi = N_1\chi_+$ y $\chi = N_2\chi_-$ encontramos las dos soluciones propuestas por Javier:

$$u_1 = N_1\begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega_p+m}\chi_+ \end{pmatrix}, \qquad u_2 = N_2\begin{pmatrix} \chi_- \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega_p+m}\chi_- \end{pmatrix}$$

Notemos que para que estas soluciones sean validad simplemente tenemos que imponer que N_1 y N_2 tiendan a una constante distinta de cero en el límite $\vec{p} \to 0$. Notemos también que χ_+ y χ_- forman una base de los vectores de dimensión 2, por lo que podemos encontrar cualquier solución u con $p_0 = \omega_p$ como combinación lineal de u_1 y u_2.

El caso $p_0 = -\omega_p$ es idéntico, pero ahora para hacer el límite es mejor escoger la otra forma para u:

$$\psi_- = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega_p+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i\omega_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

De nuevo en el límite $\vec{p} \to 0$ recuperamos ψ_- de forma inmediata siempre que χ tienda a un vector constante distinto de cero. Y podemos obtener las soluciones propuestas por Javier escogiendo $\chi = N_3\chi_+$ y $\chi = N_4\chi_-$

$$u_3 = N_3\begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega_p+m}\chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix}, \qquad u_4 = N_4\begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\omega_p+m}\chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix}$$

De nuevo, esos dos vectores forman una base de todas las soluciones con $p_0 = -\omega_p$.